曲率

曲線 $C: y=\cos kx$（k は正の定数）の点$(0,\ 1)$における曲がりの程度について考えてみよう。

① 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \cos kt)$（$0<t<\dfrac{\pi}{2k}$）における法線と y 軸との交点 Q の y 座標を求めてみよう。

$y'=-k\sin kx$（k は正の定数）より，C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \cos kt)$ における法線の方程式は，

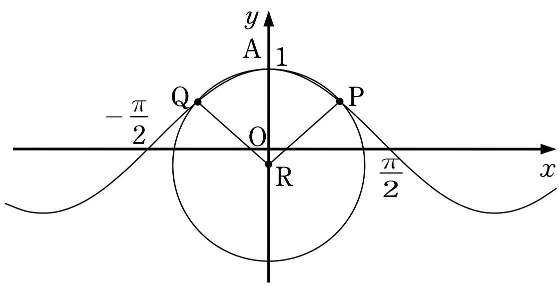
$k\sin kx \neq 0$ より　$y=\dfrac{1}{k\sin kt}(x-t)+\cos kt$

y 軸との交点は，$x=0$ より $y=-\dfrac{t}{k\sin kt}+\cos kt$　　$\therefore$　$\mathrm{Q}\left(0,\ \cos kt-\dfrac{t}{k\sin kt}\right)$

P が点$(0,\ 1)$に近づくとき，すなわち $t\to 0$ とき

$\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(\cos kt-\frac{t}{k\sin kt}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\cos kt-\frac{1}{k^2}\cdot\frac{kt}{\sin kt}\right)=1-\frac{1}{k^2}$ より，点 Q は点$\left(0,\ 1-\dfrac{1}{k^2}\right)$に近づく。

② C 上の 3 点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{P}(\theta,\ \cos k\theta)$, $\mathrm{Q}(-\theta,\ \cos k\theta)$（$0<\theta<\dfrac{\pi}{2k}$）を通る円の中心を R とする。



円の中心 R は，対称性から y 軸上にあることがわかるから，2 点$(0,\ 1)$，$(\theta,\ \cos k\theta)$を結ぶ線分 AP の垂直二等分線と y 軸との交点がその中心 R である。2 点$(0,\ 1)$，$(\theta,\ \cos k\theta)$ を結ぶ線分 AP の垂直二等分線は，点$\left(\dfrac{\theta}{2},\ \dfrac{1+\cos k\theta}{2}\right)$ を通り，傾きが $\dfrac{\theta}{1-\cos k\theta}$ の直線だから，その方程式は

$$y-\frac{1+\cos k\theta}{2}=\frac{\theta}{1-\cos k\theta}\left(x-\frac{\theta}{2}\right)$$

である。y 軸との交点は，$x=0$ より $y=\dfrac{1+\cos k\theta}{2}-\dfrac{\theta^2}{2(1-\cos k\theta)}$

ここで，$\theta\to 0$ とすると，$\dfrac{\theta^2}{2(1-\cos k\theta)}=\dfrac{\theta^2(1+\cos k\theta)}{2\sin^2 k\theta}=\dfrac{1+\cos k\theta}{2k^2}\cdot\dfrac{(k\theta)^2}{\sin^2 k\theta}\ \to\ \dfrac{1}{k^2}$

よって，R は点$\left(0,\ 1-\dfrac{1}{k^2}\right)$ に近づく。

この極限として得られる円について，その上半円の方程式は，中心$\left(0,\ 1-\dfrac{1}{k^2}\right)$，半径 $\dfrac{1}{k^2}$ だから，$y=1-\dfrac{1}{k^2}+\sqrt{\left(\dfrac{1}{k^2}\right)^2-x^2}$ と表される。

ここで，$g(x)=1-\dfrac{1}{k^2}+\sqrt{\left(\dfrac{1}{k^2}\right)^2-x^2}$ ，$f(x)=\cos kx$ とおくと，$f(0)=g(0)=1$，$f'(0)=g'(0)=0$ である。また，

$f'(x)=-k\sin kx$，$f''(x)=-k^2\cos kx$，$g'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{\dfrac{1}{k^4}-x^2}}$，$g''(x)=-\dfrac{1}{k^4\sqrt{\left(\dfrac{1}{k^4}-x^2\right)^3}}$ より，

$f''(0)=g''(0)=-k^2$ である。

曲線$\Gamma : y=f(x)$上の 3 点 A, P, Q を通る円 C において，A を固定して P と Q を曲線Γに沿って A に近づけるとき，円 C が一定な円に近づくならば，この極限の円を点 A における曲線Γの接触円または**曲率円**といい，その中心を**曲率中心**，その半径を**曲率半径**という。

曲線 $y=f(x)$の点 $x=a$ における曲率半径は $\dfrac{\sqrt{1+\{f'(a)\}^2}^{\,3}}{\left|f''(a)\right|}$ である。曲率半径の逆数を曲率という。

曲率とは，曲線の曲がり具合を表す量である。曲面についても同様である。